媒介変数表示に迫る

問題

　xy 平面上に放物線 C_1 : $y=x^2-(\sin\theta)x+\sin 2\theta$ と直線 C_2 : $y=(2\cos\theta)x$ がある。ただし，θ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす。　(1)，(2)，(3)は略。

(4)　C_1 と C_2 の共有点の x 座標を a，b ($a\leqq b$) とする。$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で θ の値を変化させるとき，点 $(a,\ 2a\cos\theta)$ の軌跡が囲む部分の面積 T を求めよ。　(2025，名古屋工業大学)

解答　C_1 と C_2 の共有点の x 座標は，

x の 2 次方程式 $x^2-(\sin\theta)x+\sin 2\theta=(2\cos\theta)x$

の解である。これを式変形して，

$x^2-(2\cos\theta+\sin\theta)x+2\sin\theta\cos\theta=0$

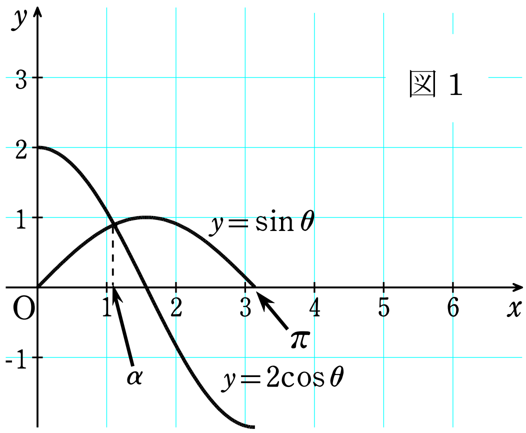
$\Longleftrightarrow$ $(x-2\cos\theta)(x-\sin\theta)=0$　となるから，

C_1 と C_2 の共有点の x 座標はそれぞれ

　$2\cos\theta$，$\sin\theta$　　である。

$2\cos\theta$ と $\sin\theta$ の大小関係を調べるために

図 1 のようなグラフで考える。



$2\cos\alpha=\sin\alpha$ ……①　$(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると，

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入して，

$5\cos^2\alpha=1$，　範囲より $\sin\alpha\geqq0$，　また①より

$\cos\alpha\geqq0$，ゆえに　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

［1］ $0\leqq\theta\leqq\alpha$ のとき，図1より，　$\sin\theta\leqq2\cos\theta$

　だから，　$a=\sin\theta$

$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta \end{cases}$　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta$

［2］ $\alpha<\theta\leqq\pi$ のとき，図1より，　$2\cos\theta<\sin\theta$

　だから，　$a=2\cos\theta$

$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=4\cos^2\theta \end{cases}$　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=-4\sin 2\theta$

［1］，［2］を踏まえて，媒介変数による増減表をつくると，表［1］,表［2］のようになる。

表［1］

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	α
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	
x	0	$\to$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\to$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\frac{4}{5}$

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	
x	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	-2
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
y	$\frac{4}{5}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	4

表［2］

山脇の超数学講座 No. 80

さらに点$(a,\ 2a\cos\theta)$の軌跡，つまり$(x,\ y)$のグラフ（曲線）を描くと，図2のようになる。

また，点$(a,\ 2a\cos\theta)$の軌跡が囲む部分とは図2の斜線部分であり，yについて，$0\leqq\theta\leqq\alpha$ の部分を y_1，$\alpha\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を y_2 とすると，面積Tは以下のように求められる。

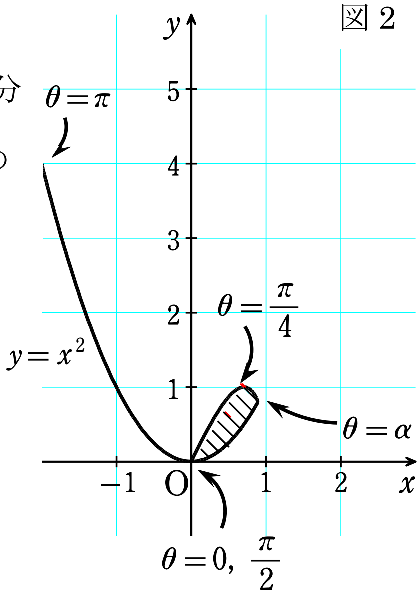


図2

$$T=\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} y_1\,dx-\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}} y_2\,dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\sin 2\theta\ \cos\theta\ d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}4\cos^2\theta(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$=-\int_0^{\alpha}2\cos^2\theta(\cos\theta)'\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}8\cos^2\theta(\cos\theta)'\,d\theta$$

$$=-\left[\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{8}{3}\cos^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}-0\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\quad=\underline{\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{15}}\quad\text{答}$$

別解　$2\cos\alpha=\sin\alpha$ とし，$\cos\alpha\geqq 0$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ までは本解と同じ。

[1]　$0\leqq\theta\leqq\alpha$ のとき　$\sin\theta\leqq 2\cos\theta$，　$a=\sin\theta$

$x=\sin\theta$，$y=2\sin\theta\cos\theta$，　$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$，　よって　$y=2x\sqrt{1-x^2}$ ……②

また，$0\leqq\theta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\sin\theta\leqq\sin\alpha$ であるから　$0\leqq x\leqq\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[2]　$\alpha<\theta\leqq\pi$ のとき　$2\cos\theta<\sin\theta$，　$a=2\cos\theta$

$x=2\cos\theta$，$y=4\cos^2\theta$，　したがって　$y=x^2$　……③

$\alpha<\theta\leqq\pi$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-1\leqq\cos\theta<\cos\alpha$ であるから　$-2\leqq x<\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[1]，[2]より，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，点$(a,\ 2a\cos\theta)$の軌跡は図2の通りで，求める面積Tは図の斜線部分の面積である。②≧③を踏まえれば，Tは以下のように求められる

$$T=\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}(2x\sqrt{1-x^2}-x^2)\,dx\ =\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\left\{-(1-x^2)'(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=-\frac{2}{3}\left(1-\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{8}{15\sqrt{5}}\ =\underline{\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{15}}\ \text{答}$$